Suites numériques

Définition de la suite numérique :

Une suite numérique est une fonction de ou de à valeurs dans . On la note ou

Série :

On note la série de terme général ,

est la somme partielle d’ordre de

Convergence des séries :

La série numérique est dite convergente si la suite de ses sommes partielles converge, ie :

En cas de converge (ie d’existence de ), on définit pour tout le reste d’ordre de par

Une série non convergente est dite divergente.

Limite des restes en cas de convergence :

Si converge, alors

Série télescopique :

Une série télescopique est une série numérique dont le terme général est où

On a alors converge converge

Et en cas de convergence,

Théorème :

Soit une série numérique. Si converge, alors

Contraposée : Si ne converge pas vers 0, alors on dit que diverge grossièrement.

Opérations sur les séries convergentes :

Soient et deux séries numériques. Si et convergent, alors converge.

Ainsi, si converge et diverge, alors diverge.

**Séries à termes positifs**

Majoration des sommes partielles

Soit une suite de réels positifs. La série numérique converge ssi la suite de ses sommes partielles est majorée. En cas de convergence, on a :

Corollaire :

Soit et deux SATP tq

1. Si converge, alors converge.
2. Si diverge, alors diverge.

Convergence et domination :

Soient et deux SATP. On suppose que

1. Si converge alors converge.
2. SI diverge alors diverge.

Convergence et équivalents :

Soient et deux SATP. On suppose que .

Alors et sont de même nature.

**Critères d’étude :**

Théorème : (Règle d’Alembert)

Soit une suite réelle, en supposant que

Si , alors

1. Si , alors diverge grossièrement.
2. Si , alors converge.
3. Si , on ne peut conclure.

Théorème de comparaison série-intégrale :

Soit et une fonction continue, décroissante et à valeurs >0.

Alors la série numérique et l’intégrale généralisée on même nature.

**Séries de référence :**

* Suites géométriques : Soit , la série géométrique converge ssi
* Théorème : (Séries de Riemann)

Soit La série numérique converge ssi .

Théorème : Série définissant l’exponentielle

Soit . La série suivante converge :

**Séries numériques à termes quelconques :**

Définition : Convergence absolue

Soit une suite numérique. On dit que la série numérique converge absolument si la série à termes positifs converge.

Théorème : (Inégalité triangulaire)

Soit une série numérique. Si converge absolument, converge et :

Définition : Semi-convergence

On dit d’une série qui converge mais pas absolument qu’elle est semi-convergente.

**Critère des séries alternées :**

Définition : (Suite et série alternées)

Soit une suite réelle. On dit que la suite est alternée si :

Ceci équivaut à :

Ou encore :

On dit que est alternée si est alternée

Théorème : Critère Spécial des Séries Alternées (CSSA)

Soit une série alternée.

Si :

1. La suite est décroissante

Alors converge.

Corollaire : Soit une suite vérifiant les hypothèses du CSSA. Alors est du même signe que le premier terme de la série.

**Études asymptotiques :**

Théorème : (Sommation des relations de comparaisons)

Soit une suite complexe et une SATP réelle.

1. Supposons que diverge.
2. Si alors
3. Si alors
4. Supposons que converge.
5. Si alors
6. Si alors

Corollaire : (Théorème de sommation des équivalents)

Soient et 2 suites réelles à termes positifs telles que

1. Si une de ces séries diverge, l’autre aussi, et on a :
2. Si une de ces séries converge, l’autre aussi, et on a :

Définition : (Produit de Cauchy)

Soient et deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy de et la série numérique , avec :

Théorème : Soient et deux séries numériques.

Si ces deux séries convergent absolument, alors leur produit de Cauchy converge absolument, et on a :